

گاز فرمیونی در دما و چگالی دلخواه

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۳۰ فروردین ۱۴۰۳

۱ مقدمه

انریکو فرمی یکی از درخشان ترین فیزیکدان های قرن بیستم است که هم در حوزه فیزیک نظری و هم فیزیک تجربی کارهای زیادی انجام داده است. آمار فرمی دیراک در مکانیک آماری، واپاشی بتا، نخستین واکنش زنجیره ای در هسته های رادیواکتیو، و بسیاری اکتشافات دیگر در فیزیک اتمی و هسته ای همه ناشی از کارهای اوست. به خاطر انبوه تحقیقاتش، علاوه بر جوایزی مثل جایزه نوبل و جایزه های دیگر بسیاری چیزها نیز نام فرمی را به یدک می کشند، از جمله: آزمایشگاه فرمی در شیکاگو، تلسکوپ فضایی گامای فرمی، سه راکتور هسته ای در آمریکا، یک نیروگاه هسته ای در ایتالیا و و یک راکتور تحقیقاتی در آرژانتین و البته یک عنصر در جدول تناوبی به نام فرمیوم. از گفته های معروف اوست که:

«هرچیزی که طبیعت به انسان عرضه می کند، هرچند ناخوشایند، باید به استقبالش رفت، چرا که نادانی هیچگاه بهتر از دانش نیست.» در بین فیزیکدانان هم نسل اش فرمی عمر خیلی کوتاهی داشت و در سالیایی که از او دریغ شد چه بسا می توانست به کشفیات بازمهم بیشتری دست یابد. فرمی در اکتبر ۱۹۵۴ تحت یک عمل جراحی قرار گرفت و پنجاه روز بعد در اثر سرطان معده در ۵۳ سالگی در خانه اش در شیکاگو درگذشت. مراسم یادبود وی در کلیسای کوچک دانشگاه شیکاگو برگزار شد، جایی که چندتن از همکارانش برای عزاداری از دست دادن یکی از «درخشانترین و سازندهترین فیزیکدانهای جهان» سخنرانی کردند.

در درس های گذشته ابزارهای لازم برای بررسی یک سیستم فرمیونی ایده آل را فراهم آوردیم. هم چنین گاز فرمیونی سه بعدی را در دمای صفر



شکل ۱: انریکو فرمی (۱۹۰۱-۱۹۵۴)

مطالعه کردیم. به صورت کیفی نیز نشان دادیم وقتی که دما بیشتر از صفر می شود، طرح پراکندگی ذرات در سطوح مختلف انرژی به چه شکل در می آید. در این درس گاز فرمیونی را با تفصیل بیشتری مطالعه می کنیم. این تفصیل به دو صورت است: نخست آنکه گاز را در دمای غیر صفر بررسی می کنیم و دوم اینکه آن را در بعد دلخواه مطالعه می کنیم. البته بدیهی است که مطالعه یک گاز در بعد بیشتر از ۳ کاربرد فیزیکی مشخصی ندارد، اما فایده اش این است که به وضوح اثر بعد را در این مطالعه و شیوه تاثیر اصل طرد پاولی را می بینیم. خواهیم دید که هر چه بعد بیشتر باشد، اثر طرد پاولی ضعیف تر است، دلیل شهودی اش هم این است که فرمیون ها جای بیشتری برای پرهیز از یکدیگر و فرار از نیروی مجازی دافعه نسبت به هم دارند. به عبارت دیگر هر چه که بعد بیشتر باشد، رفتار گاز فرمیونی به گاز کلاسیک شبیه تر است. علاوه بر این مشاهده کلی، مطالعه گاز فرمی در دو بعد نیز کاربرد مهم و گسترده ای دارد. در بسیاری از قطعات الکترونیک که از لایه های نیم رسانا روی هم تشکیل شده، یک گاز الکترونی ایده آل بین لایه ها تشکیل می شود. این گاز البته در فضای سه بعدی زندگی می کند، انرژی یک ذره آزاد در این محیط برابر

است با:

$$\epsilon_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{l^2} \right), \quad (1)$$

که در آن L ابعاد عرضی و طولی نیمه هادی ها و l فاصله بین آنهاست و $l \ll L$ است. در این صورت برای پایین آوردن انرژی به صرفه است که اعداد کوانتومی n_x, n_y هر مقدار دلخواهی را اختیار کنند ولی n_z همچنان صفر باقی بماند و مقداری جز آن را اختیار نکند. نتیجه اش این است که گاز عملاً در دوبعد محبوس می شود و ما با یک گاز الکترونی دو بعدی سروکار خواهیم داشت. به همین دلیل است که می توان گفت گاز الکترونی دوبعدی واقعا وجود دارد. علاوه بر نیمه هادی ها، در انواعی دیگر از شرایط نیز گاز الکترونی دوبعدی تشکیل میشود، مثلاً روی سطح هلیوم مایع، یا روی سطح یک عایق توپولوژیک و نظایر آن. خواننده برای مطالعه بیشتر می تواند به منابع تخصصی این موضوع مراجعه کند.

۲ تابع پارش گاز فرمیونی در بعد دلخواه

فرض می کنیم که فرمیون ها در درون ظرفی مکعبی با ابعاد L قرار گرفته اند. هم چنین برای حفظ کلیت فرض می کنیم که این ظرف مکعبی d بعدی است. نخست سطوح انرژی یک تک ذره را حساب می کنیم. مکانیک کوانتومی به ما می آموزد که انرژی یک ذره در چنین جعبه ای برابر است با:

$$\epsilon_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_d^2), \quad (2)$$

که در آن l_1 تا l_d اعداد صحیح مساوی یا بزرگ تر از صفر هستند. قبلاً یاد گرفته ایم که تعداد کل ذرات، تعداد متوسط ذرات در هر لایه انرژی، انرژی کل و تابع پارش گراندکانونیک یک گاز فرمی در دمای دلخواه به صورت زیر است: خواننده برای یادآوری این روابط می بایست به درسهای مکانیک آماری کوانتومی (I) و (II) مراجعه کند.

$$N = \sum_{l_1, \dots, l_d} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_l} + 1}, \quad (3)$$

$$n_l = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_l} + 1} \quad (4)$$

$$U = \sum_{l_1, \dots, l_d} \frac{\epsilon_l}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_l} + 1} \quad (5)$$

$$\frac{PV}{kT} = \sum_{l_1, \dots, l_d} \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon_l}). \quad (6)$$

در این روابط طرف راست بر حسب پارامتری مثل z بسط داده شده اند. می خواهیم طرف راست را به صورت انتگرال هایی درآوریم، این انتگرال ها را محاسبه کنیم و سپس پارامتر z را بین آنها حذف کنیم تا بتوانیم به روابط ترمودینامیکی دست پیدا کنیم. با توجه به این که

$$0 \leq n_l \leq 1$$

، می دانیم که محدوده پارامتر z چنین است:

$$0 \leq z \leq \infty.$$

از آنجا که $z = e^{\beta \mu}$ است، محدوده بالا برای پارامتر z به این معناست که μ می تواند هر مقدار مثبت یا منفی ای را اختیار کند. از تعریف ترمودینامیکی و رابطه

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

می دانیم که μ میزان تغییر انرژی است وقتی که حجم و انتروپی را ثابت نگاه داریم. در نگاه اول ممکن است عجیب به نظر برسد که با افزایش ذره انرژی سیستم کاهش پیدا کند، اما باید توجه کنیم که در اینجا منظور از تغییرات انرژی است وقتی که انتروپی را ثابت نگاه داشته ایم. این ثابت نگاه داشتن انتروپی است که باعث منفی شدن پتانسیل شیمیایی می شود. به این نکته در ادامه درس بازخواهیم گشت. فعلا می بایست یک مقدمه برای چگونگی تبدیل این جمع ها به انتگرال ها یاد بگیریم.

۳ یک مقدمه ریاضی: تبدیل جمع روی حالت ها به انتگرال

اعداد l_1, l_2, \dots, l_d اعداد کوانتومی نشان دهنده ویژه حالت های انرژی هستند. این اعداد، مثبت و صحیح هستند و همگی در شرط $0 \leq l_i < \infty$ صدق می کنند. برای تجسم بهتر d را برابر با 2 می گیریم. آنچه که برای این بعد می آموزیم به راحتی به ابعاد دلخواه نیز تعمیم پیدا می کند. نکته مهم این است که تابع پارش مستقما به l_i ها بستگی ندارد بلکه بستگی آن از طریق تکانه های $k_i = \frac{\pi}{L} l_i$ است. (\hbar را برابر با یک گرفته ایم).

اگر وقتی که l_i ها تغییر می کنند، k_i خیلی به آهستگی تغییر کند می توانیم جمع روی l_i ها را به انتگرال روی k_i تبدیل کنیم. برای این کار کافی است محاسبه کنیم که به ازای هر بازه کوچک Δk_i چه تعداد نقطه در شکل (۲) وجود دارد. این تعداد را از روی شکل می توان تعیین کرد: دیده می شود که در هر امتدادی این تعداد برابر است با:

$$\Delta l_i = \frac{\Delta k_i}{\frac{\pi}{L}}$$

و در نتیجه در بعد دلخواه d قاعده زیر را برای تبدیل جمع به انتگرال داریم:

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^d \int dk_1 dk_2 \dots dk_d \quad (۷)$$

و اگر تابع انتگرالده تنها به اندازه k بستگی داشته باشد، می توان انتگرال را به صورت زیر نوشت که در آن این موضوع نیز رعایت شده است که جمع و در نتیجه انتگرال روی k_i های مثبت صورت می گیرد:

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} = \left(\frac{V}{(2\pi)^d}\right) \Omega_{d-1} \int k^{d-1} dk \quad (۸)$$

که در آن Ω_{d-1} سطح کره $d-1$ بعدی است. رابطه (۸) یک رابطه اساسی است که به راه های مختلف در محاسبات مکانیک آماری و نظریه کوانتومی پدیدار می شود و می بایست نحوه استخراج آن را به خوبی فرا گرفت. در موضوعی که با آن سر و کار داریم تابع زیر انتگرال تابعی است از $\beta\epsilon = \beta \frac{\hbar^2}{2m} k^2$. یعنی با انتگرال های از نوع زیر سر و کار داریم:

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} F(\beta\epsilon_l) = \frac{V\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty k^{d-1} dk F(\beta\epsilon). \quad (۹)$$

بنابر این بهتر است که متغیر انتگرال را $x = \beta\epsilon$ بگیریم. برای این کار می بایست بنویسیم:

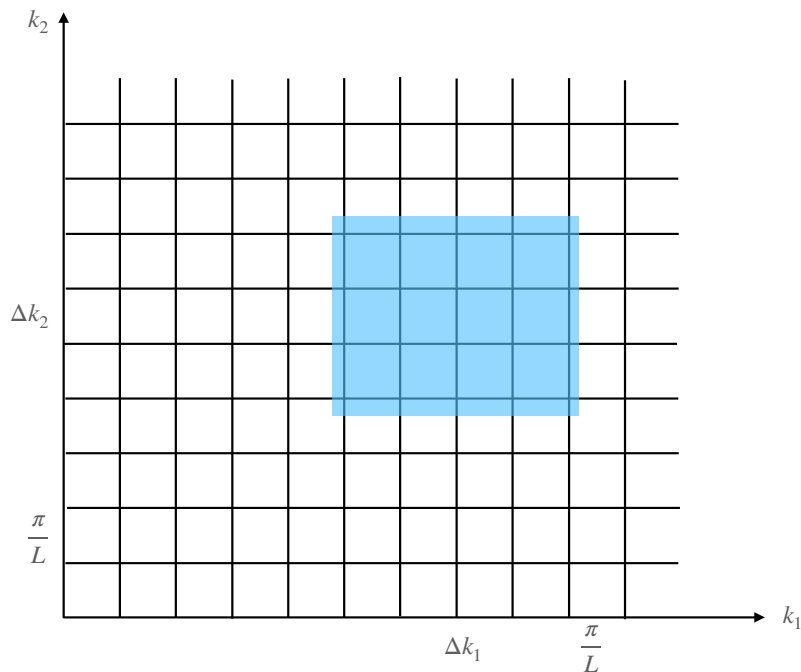
$$x = \beta\epsilon = \beta \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad (۱۰)$$

و از آنجا

$$k = \left(\frac{2m}{\beta\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\lambda} x^{\frac{1}{2}}, \quad (۱۱)$$

که در آن $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ طول موج گرمایی است. بنابراین

$$\frac{V\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} k^{d-1} dk = \frac{V\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \frac{2^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\lambda^d} \frac{1}{2} x^{\frac{d}{2}-1} dx = \frac{V}{\lambda^d} \left(\frac{\Omega_{d-1}}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\right) x^{\frac{d}{2}-1} dx \quad (۱۲)$$



شکل ۲: در هر فاصله Δk_i تعداد $n_i = \frac{\Delta k_i}{\frac{\pi}{L}}$ تا نقطه وجود دارد.

اما می دانیم که

$$\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

بنابر این به رابطه ساده زیر می رسم:

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} F(\beta \epsilon_{l_1}) = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} dx F(\beta \epsilon_x). \quad (13)$$

رابطه فوق برای هر تابعی درست است. این رابطه یک رابطه کلی است که بیان می کند جمع روی ویژه مقادیر انرژی را چگونه به یک انتگرال تبدیل کنیم. حال از این رابطه اساسی استفاده می کنم و برای فرمیون ها روابط (۳) تا (۶) را به صورت انتگرال بازنویسی می کنیم. بدست می آوریم:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}-1} dx}{1 + z^{-1} e^x} \quad (14)$$

$$\frac{U}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}} dx}{1 + z^{-1}e^x} \quad (15)$$

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 + ze^{-x}) dx. \quad (16)$$

نخست به رابطه (16) دقت می کنیم. می توان با انجام یک انتگرال جزء به جزء طرف راست را به شکل دیگری نوشت:

$$\int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} dx \ln(1 + ze^{-x}) = \frac{2}{d} x^{\frac{d}{2}} \ln(1 + ze^{-x}) \Big|_0^\infty + \frac{2}{d} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}}}{1 + z^{-1}e^x} dx \quad (17)$$

عبارت اول در هر دو حد $x \rightarrow 0$ و $x \rightarrow \infty$ برابر با صفر خواهد شد. بنابراین بدست می آوریم:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}}}{1 + z^{-1}e^x} dx \quad (18)$$

و در نتیجه از مقایسه این رابطه با رابطه (15) به رابطه کلی زیر می رسم که همواره برای یک سیستم فرمیونی درست است:

$$PV = \frac{2}{d} U. \quad (19)$$

بنابراین اگر تابع فرمیونی $f_n(z)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{1 + z^{-1}e^x} \quad (20)$$

آنگاه رابطه اصلی به شکل زیر در خواهد آمد:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} f_{d/2}(z), \quad \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} f_{\frac{d}{2}+1}(z), \quad U = \frac{d}{2} PV. \quad (21)$$

توابع $f_n(z)$ یک خصوصیت جالب دارند. برای بدست آوردن آن دقت می کنیم که

$$z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 + z^{-1}e^x} \right) = \frac{1}{(1 + z^{-1}e^x)^2} z^{-1}e^x = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + z^{-1}e^x} \right) \quad (22)$$

با استفاده از این رابطه انجام یک انتگرال جزء به جزء^۱ می‌رسیم به این که:

$$z \frac{d}{dz} f_n(z) = f_{n-1}(z). \quad (23)$$

برای محاسبه ظرفیت گرمایی ویژه و بعضی از خصوصیات دیگر احتیاج داریم که کمیت $(\frac{\partial z}{\partial T})_{N,V}$ را حساب کنیم.

■ **یادآوری یک نکته:** در آنزامل گراندکانونیک گفتیم که متغیرهای z و T متغیرهای مستقلی هستند. بنابراین خواننده کنجکاو و دقیق

ممکن است بپرسد با توجه به استقلال این دو متغیر از هم مشتق آنها نسبت به هم چه معنایی دارد. پاسخ این است: درست است که در آنزامل گراندکانونیک، متغیرهای مستقل عبارت اند از: z, V, T . در نتیجه تابع پارش، فشار و تعداد ذرات همگی تابعی از این سه متغیر خواهند بود. به خصوص خواهیم داشت:

$$N = N(z, V, T).$$

اما اگر N, V, T را متغیر مستقل بگیریم، یعنی این رابطه را معکوس کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$z = z(N, V, T)$$

که به این معناست که z تابعی از دما خواهد شد. تحت این شرایط است که $(\frac{\partial z}{\partial T})_{N,V}$ معنا پیدا می‌کند.

برای این کار از طرفین اولین رابطه (۲۱) $\frac{N}{V} = \lambda^{-d} f_{d/2}(z)$ نسبت به T و در (N, V) ثابت مشتق می‌گیریم. بدست می‌آوریم:

$$0 = -d\lambda^{-d-1} \frac{d\lambda}{dT} f_{d/2}(z) + \lambda^{-d} \left(\frac{d}{dz} f_{d/2}(z) \right) \frac{\partial z}{\partial T}. \quad (24)$$

با توجه به تعریف طول موج گرمایی λ می‌دانیم که

$$\frac{d\lambda}{dT} = \frac{-1}{2} \frac{\lambda}{T}. \quad (25)$$

بنابراین با جایگذاری در این رابطه و ساده کردن آن خواهیم داشت:

$$0 = d \left(\frac{1}{2} \frac{1}{T} \right) f_{d/2}(z) + \frac{1}{z} f_{d/2-1}(z) \frac{\partial z}{\partial T} \quad (26)$$

و از آنجا

$$\left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{N,V} = -\frac{zd}{2T} \frac{f_{d/2}}{f_{d/2-1}} \quad (27)$$

^۱ برای اثبات به ضمیمه ی درس رجوع کنید.

بعد از این مقدمات آماده ایم که گاز فرمی را در دمای دلخواه مطالعه کنیم. نخست به سراغ دمای صفر می رویم. اما قبل از آن برای مراجعه آینده مفید است که بسط تابع $f_n(z)$ را برای z های کوچک و z در این جا بنویسیم. این بسط ها در آینده هم اثبات خواهند شد و هم کاربرد آنها مشخص خواهد شد.

۱.۳ بسط های تابع فرمیونی

تابع $f_n(z)$ را یک تابع فرمیونی می خوانیم. شناخت خصوصیات این توابع برای درک روابط ترمودینامیکی در محدوده های متفاوت مهم است. در این جا برای راحتی کار خود در آینده دو نوع بسط از تابع $f_n(z)$ را می نویسیم. اثبات این روابط و کاربرد آنها موضوع بخش های آینده خواهد بود.

■ بسط تابع $f_n(z)$ برای $(z < 1)$:

$$f_n(z) = z - \frac{z^2}{2^n} + \frac{z^3}{3^n} - \frac{z^4}{4^n} + \dots \quad (28)$$

■ بسط تابع $f_n(z)$ برای $(z > 1)$: در این محدوده تابع $f_n(z)$ را می توان بر حسب قوای منفی از پارامتر $z = \ln \xi$ بسط داد. این بسط به صورت زیر است:

$$f_n(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \xi^n \left[1 + n(n-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} + n(n-1)(n-2)(n-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right]. \quad (29)$$

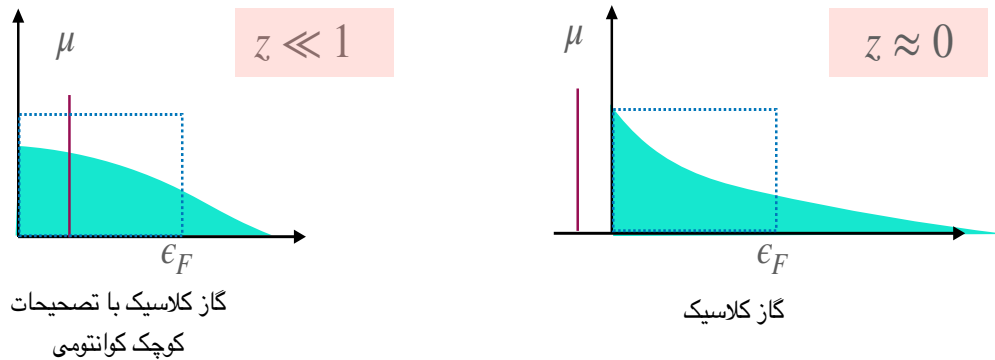
دقت کنید که وقتی n عدد صحیح است، بسط فوق یک چند جمله ای متناهی است. به عنوان مثال داریم:

$$f_1(z) = \xi$$

$$\begin{aligned}
 f_{3/2}(z) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \xi^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\xi^2} - \frac{7\pi^4}{960} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right] \\
 f_2(z) &= \frac{1}{2} \xi^2 \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{\xi^2} \right] \\
 f_{5/2}(z) &= \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \xi^{\frac{5}{2}} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \frac{1}{\xi^2} - \frac{7\pi^4}{384} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{۳۰}$$

۴ گاز فرمی در دماهای زیاد یا چگالی های کم $z < 1$

به صورت کیفی در این محدوده ما با گاز کلاسیک روبرو هستیم که آثار کوانتومی به صورت خیلی کم در آن قابل مشاهده است. ذرات گاز در همه ترازهای انرژی پخش شده اند و طرح پراکندگی ذرات در ترازهای انرژی به صورت نشان داده در شکل (۳) است.



شکل ۳: چگالی ذرات در لایه های انرژی یک گاز فرمی در دماهای بالا یا چگالی های کم. در تقریب صفرم یعنی وقتی که $(z \ll 1)$ است، گاز فرمی مثل یک گاز کلاسیک رفتار می کند و احتمال اشغال حالت ها توسط تابع بولتزمن داده می شود. با بزرگتر شدن این پارامتر که مجبور می شویم تقریب های بالاتر را نیز در نظر بگیریم آثار کوانتومی و اصل طرد پاولی به تدریج در گاز ظاهر می شود. در همه روابط ترمودینامیکی این تصحیحات کوانتومی ظاهر می شوند. دقت کنید که در دماهای بالا پتانسیل شیمیایی می تواند منفی باشد.

در این محدوده، از بسط (۲۸) استفاده می‌کنیم.

۱.۴ تقریب صفرم

در تقریب صفرم اولین جمله بسط را نگاه می‌داریم و قرار می‌دهیم $z \approx f_n(z)$. در واقع در تقریب صفرم، فرض ما این است که دما آنقدر بالا یا چگالی آنقدر کم است که می‌توانیم از مرتبه‌های بالاتر از صرف نظر کنیم. در واقع در این حد طول موج گرمایی ذرات نسبت به فاصله بین آنها بسیار کوچک شده و ذرات از هم تمیز پذیر شده‌اند. در این شرایط آثار کوانتومی قابل ملاحظه نیستند و انتظار داریم که در این حد تصویر کلاسیک گاز را بازیابی کنیم. در این حد تعداد متوسط ذرات در هر تراز کوانتومی که به صورت $n_l = \frac{1}{1+z^{-1}e^{\beta\epsilon_l}}$ است به حد $n_l = ze^{-\beta\epsilon_l}$ میل می‌کند. در نتیجه احتمال حضور ذره در یک تراز l برابر است با

$$P_l = \frac{n_l}{\sum_l n_l} = \frac{e^{-\beta\epsilon_l}}{\sum_l e^{-\beta\epsilon_l}} = \frac{1}{Z} e^{-\beta\epsilon_l} \quad (31)$$

که در آن Z همان تابع پارش است. در این حد گاز فرمی رفتاری کاملاً کلاسیک دارد و همان رفتاری را دارد که تا کنون مطالعه کرده‌ایم. در این حد قرار می‌دهیم $z \rightarrow 0$. در نتیجه از رابطه (۲۸) خواهیم داشت $z \rightarrow f_n(z)$ و در نتیجه از روابط (۲۱) بدست می‌آوریم:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} z, \quad \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} z, \quad U = \frac{d}{2} PV. \quad (32)$$

با حذف z به روابط آشنای گاز ایده آل کلاسیک در بعد d می‌رسیم:

$$PV = NkT, \quad U = \frac{d}{2} NkT. \quad (33)$$

در این حد کمیت‌های ترمودینامیکی مثل ظرفیت گرمایی یا تراکم پذیری براحتی محاسبه می‌شوند. داریم:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{d}{2} Nk, \quad \kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{N,T} = \frac{1}{P}. \quad (34)$$

این روابط همان روابط گاز کلاسیک هستند و آثار کوانتومی و اصل طرد پاولی قابل مشاهده نیستند.

۲.۴ تقریب‌های بالاتر

حال می‌توانیم مرتبه‌های بالاتر را در بسط (۲۸) از توابع $f_n(z)$ نگاه داریم. به این ترتیب تصحیحات کوچک کوانتومی را بر روابط گاز کلاسیک پیدا می‌کنیم. هر چه که دما را پایین‌تر بیاوریم یا چگالی را زیاد کنیم، آثار کوانتومی و تصحیحات اعمال شده بر رفتار گاز کلاسیک

بیشتر می شوند. پارامتری که کوانتومی بودن گاز را نشان می دهد همان $n\lambda^d$ است.

پارامتر $n\lambda^d$ یک پارامتر کنترلی است که می توانیم آن را از قبل و با توجه به شرایط خارجی مشخص کنیم. در این حد این پارامتر بسیار کوچک است و طبیعی است که همین پارامتر به عنوان پارامتری برای بسط نیز به کار می رود. در واقع انتظار داریم که در این حد برای معادله حالت به بسطی از نوع زیر برسیم:

$$\frac{PV}{kT} = N(1 + b_1(n\lambda^d) + b_2(n\lambda^d)^2 + \dots) \quad (35)$$

که در آن ضرایب b_i موسوم به ضرایب ویریا^۲ ضرایبی قابل محاسبه اند. با داشتن این رابطه انرژی نیز به عنوان یک بسط ویریا بدست می آید. سپس بقیه کمیت های ترمودینامیکی مثل ظرفیت گرمایی ویژه و انتروپی نیز به صورت بسط های ویریا محاسبه می شوند. راه بدست آوردن بسط ویریا بسیار ساده است. بسته به دقتی که در نظر داریم از بسط (۲۸) استفاده کرده و با معکوس کردن سری

$$n\lambda^d = f_{d/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{d/2}} + \frac{z^3}{3^{d/2}} - \dots \quad (36)$$

z را به صورت یک سری از $n\lambda^d$ می نویسیم. البته واضح است که بسته به رتبه تقریبی که می خواهیم نیازی به نوشتن همه جملات سری ها نداریم. سپس می توان پارامتر z را در بسط تابع $f_{d/2+1}(z)$ قرار دهیم تا بسط ویریا بدست آید. می خواهیم بسط ویریا معادله حالت یعنی رابطه (۳۵) را تا رتبه ۱ از $n\lambda^d$ بدست بیاوریم. داریم:

$$y = n\lambda^d = z - \frac{z^2}{2^{d/2}} + \dots$$

قرار می دهیم:

$$z = y + ay^2 + \dots$$

با جایگذاری رابطه دوم در رابطه اول بدست می آوریم:

$$y = (y + ay^2 + \dots) - \frac{1}{2^{d/2}}(y + \dots)^2 + \dots$$

و با مقایسه طرفین $a = \frac{1}{2^{d/2}}$ ، بنابراین

$$z = y + \frac{1}{2^{d/2}}y^2 + \dots$$

^۲ Viral Coefficients

در نتیجه

$$f_{d/2+1}(z) = z - \frac{z^2}{2^{d/2+1}} + \dots$$

$$= y + \frac{1}{2^{d/2}}y^2 + \dots - \frac{1}{2^{d/2+1}}y^2 + \dots = y + \frac{1}{2^{d/2+1}}y^2 + \dots$$

که در آن جملات \dots از مرتبه y^3 به بالا هستند. بنابراین $b_2 = \frac{1}{2^{d/2+1}}$ و در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = N\left(1 + \frac{1}{2^{d/2+1}}(n\lambda^d) + \dots\right) \quad (37)$$

دیده می شود که فشار گاز از حالت کلاسیک کمی بیشتر است و این فشار به خاطر دافعه فرمیون هاست. این رابطه تصحیحات اعمال شده به معادله ی حالت گاز ایده آل را بر حسب قوای متوالی $n\lambda^d$ بدست می دهد. هر چقدر که $n\lambda^d$ کوچک تر باشد، توان های کمتری را نگاه می داریم و گاز رفتاری نزدیک به گاز کلاسیک خواهد داشت. اما با بزرگ تر شدن $n\lambda^d$ می بایست جملات بیشتری را نگاه داشت که در این صورت رفتار گاز از یک گاز کلاسیک دور و دورتر می شود. هم چنین دیده می شود که هر چه بعد d بالاتر باشد، مقدار این نیروی دافعه کمتر می شود، چرا که فضای بیشتری برای پرهیز فرمیون ها از یکدیگر وجود دارد. می توانیم به همین ترتیب ضریب تراکم پذیری گاز فرمیونی را نیز بدست آوریم. از رابطه (37) می توانیم مشتق فشار را نسبت به حجم محاسبه کنیم. برای سادگی عبارت ها و روابط ریاضی قرار می دهیم $b = \frac{1}{2^{d/2+1}}$. خواهیم داشت:

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{-NkT}{V^2} \left[1 + b \frac{N\lambda^d}{V}\right] + \frac{NkT}{V} \left(-b \frac{N\lambda^d}{V^2}\right) = \frac{-NkT}{V^2} \left[1 + 2b \frac{N\lambda^d}{V}\right] \quad (38)$$

بنابراین تراکم پذیری برابر خواهد شد با:

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{N,T} = \frac{1}{P} \frac{1}{1 + 2bn\lambda^d} \quad (39)$$

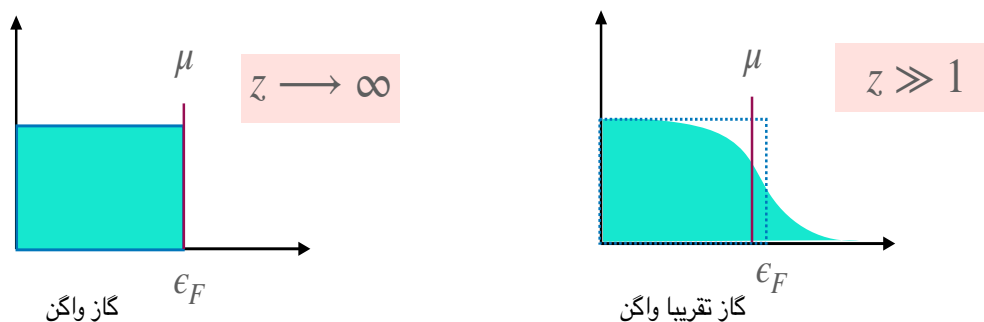
و با جایگزینی پارامتر b نهایتاً بدست می آوریم:

$$\kappa_T = \frac{1}{P} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^d} n\lambda^d}. \quad (40)$$

طبیعی است که تراکم پذیری نسبت به گاز کلاسیک کمتر است و این کاهش همانطور که انتظار داریم، ناشی از دافعه موثر بین فرمیون هاست. هم چنین از رابطه بالا معلوم است که هر چه بعد بیشتر شود، تراکم پذیری بیشتر می شود که بازهم ناشی از این است که فرمیون ها جای بیشتری برای پرهیز از یکدیگر دارند و براحتی با افزایش فشار حجم کاهش پیدا می کند.

۵ گاز فرمی در دماهای کم یا چگالی های زیاد $z > 1$

در این محدوده پارامتر z بزرگتر از یک است و باید از بسط (۲۹) برای توابع $f_n(z)$ استفاده کنیم. در این محدوده آثار کوانتومی بسیار شدید هستند. ذرات گاز بیشتر در ترازهای زیر انرژی فرمی و کمی هم اطراف آن پخش شده اند و طرح پراکندگی ذرات در ترازهای انرژی به صورت نشان داده در شکل (۴) است.



شکل ۴: چگالی ذرات در لایه های انرژی یک گاز فرمی در دماهای پایین یا چگالی های زیاد. در تقریب صفرم یعنی وقتی که $z \gg 1$ است، گاز فرمی کاملاً واگن خوانده می شود. در این شرایط تمام لایه های زیر سطح فرمی پر و تمام لایه های بالاتر از آن خالی هستند. به تدریج که دما بیشتر می شود، ترازهای نزدیک و پایین تر از سطح فرمی خالی شده و ذرات به ترازهای بالاتر می روند. در تقریب صفرم پتانسیل شیمیایی همان انرژی فرمی است ولی با بالا رفتن دما پتانسیل شیمیایی به تدریج کم می شود.

۱.۵ تقریب صفرم

در این تقریب پارامتر z آنقدر بزرگ است که در بسط های (۲۹) فقط جمله اول را نگاه می داریم و می نویسیم

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} (\ln z)^n. \quad (41)$$

در این شرایط حذف z بین روابطی که فشار و تعداد ذرات را بیان می کنند به سادگی انجام می شود و براحتی به معادلات حالت و انرژی گاز فرمی در دمای صفر می رسیم. بنابراین در این حد داریم:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} f_{d/2}(z) = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 1)} \zeta^{\frac{d}{2}} \quad (42)$$

پارامتر ζ را در این دما با ζ_0 نشان می دهیم و پتانسیل شیمیایی را نیز در این دمای خاص با ϵ_F نشان می دهیم. بنابراین می نویسیم:

$$\zeta_0 = \beta \epsilon_F \quad (43)$$

به این ترتیب تعداد ذرات برابر خواهد شد با:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 1)} (\beta \epsilon_F)^{\frac{d}{2}} \quad (44)$$

با توجه به این که طول موج گرمایی برابر است با

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m}} \beta^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

و پس از کمی محاسبه به نتیجه زیر می رسیم که انرژی فرمی را بر حسب چگالی ذرات بدست می دهد:

$$\epsilon_F = \left(\frac{h^2}{2\pi m} \right) \left(\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \right)^{\frac{2}{d}} n^{\frac{2}{d}}. \quad (46)$$

سپس به معادله فشار می پردازیم که برابر است با:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} f_{d/2+1}(z) \quad (47)$$

با تقسیم این رابطه بر N معلوم می شود که

$$\frac{PV}{NkT} = \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)} = \xi \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2 + 1)} \quad (48)$$

و یا

$$\frac{PV}{NkT} = \frac{2}{d+2} \beta \epsilon_F \quad (49)$$

به این ترتیب معادله حالت به شکل ساده زیر در می آید:

$$PV = \frac{2}{d+2} N \epsilon_F \quad (50)$$

و با توجه به رابطه انرژی و فشار خواهیم داشت:

$$U = \frac{d}{2}PV = \frac{d}{d+2}N\epsilon_F. \quad (51)$$

برای آنکه توابع پاسخ ترمودینامیکی مثل ضریب تراکم پذیری را حساب کنیم، می بایست دقت کنیم که انرژی فرمی خود تابعی از حجم نیز هست. بنابراین به رابطه زیر توجه می کنیم

$$\left(\frac{\partial \epsilon_F}{\partial V}\right)_{N,T} = -\frac{2}{d} \frac{\epsilon_F}{V}. \quad (52)$$

و از آنجا بدست می آوریم

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T} = \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_{N,T} \left(\frac{2}{d+2} \frac{N\epsilon_F}{V}\right) \quad (53)$$

یا پس از ساده کردن:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T} = -\frac{2N}{V} \frac{\epsilon_F}{d}. \quad (54)$$

به این ترتیب شکل نهایی تراکم پذیری محاسبه می شود:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{N,T} = \frac{dV}{2N\epsilon_F}. \quad (55)$$

دیده می شود که تراکم پذیری با افزایش بعد زیاد می شود که باز هم به این دلیل است که در ابعاد بالا ذرات فرمی جای بیشتری برای پرهیز از یکدیگر دارند و افزایش فشار براحتی بیشتری باعث تغییر حجم می شود.

آیا راهی ساده تری نسبت به استفاده از بسط (۲۹) برای مطالعه گاز فرمی در دمای صفر وجود دارد؟ پاسخ اش این است که دقیقاً در دمای صفر، بله یک راه ساده تر وجود دارد و آن همان راهی است که در فصل قبلی توضیح دادیم به این معنا که به تابع اشغال حالت ها نگاه کنیم. می دانیم که در این دما، تعداد متوسط ذرات در هر لایه به شکل زیر است:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{1 + z^{-1}e^x} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{x-\beta\epsilon_F}} = \theta(\beta\epsilon_F - x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < \beta\epsilon_F \\ 0 & \text{if } x > \beta\epsilon_F \end{cases} \quad (56)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱۴) می فهمیم که

$$N = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^{\beta\epsilon_F} x^{\frac{d}{2}-1} dx = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} (\beta\epsilon_F)^{\frac{d}{2}}. \quad (57)$$

و با توجه به این که

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m}} \beta^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

بدست می آوریم

$$N = V \frac{(2\pi m)^{d/2}}{h^d} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 1)} \epsilon_F^{d/2}. \quad (59)$$

به این ترتیب انرژی فرمی بر حسب چگالی ذرات بدست می آید:

$$\epsilon_F = \left(\frac{h^2}{2\pi m} \right) \left(\Gamma(\frac{d}{2} + 1) \right)^{\frac{2}{d}} n^{\frac{2}{d}}. \quad (60)$$

بنا بر این با افزایش چگالی، انرژی فرمی نیز افزایش می یابد اما چگونگی افزایش آن بستگی به بعد دارد. هم چنین بدست می آوریم:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 3)} (\beta\epsilon_F)^{d/2+1}. \quad (61)$$

پس از ساده کردن

$$PV = \frac{1}{\Gamma(d/2 + 3)} V \frac{(2\pi m)^{d/2}}{h^d} \epsilon_F^{d/2+1}. \quad (62)$$

بخصوص برای بعد $d = 2$ و بعد $d = 3$ بدست می آوریم:

$$d = 2 \quad \rightarrow \quad \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(4\pi n), \quad (63)$$

$$d = 3 \quad \rightarrow \quad \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(6\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}. \quad (64)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که

$$PV = \frac{2}{d+2} N \epsilon_F, \quad (65)$$

و

$$U = \frac{d}{d+2} N \epsilon_F. \quad (66)$$

■ **تمرین:** بستگی انرژی فرمی و سپس انرژی کل و فشار را بر حسب چگالی تنها با استفاده از آنالیز ابعادی بدست آورید.

■ **تمرین:** دمای فرمی را به صورت $T_F := \frac{\epsilon_F}{k}$ تعریف می کنیم. دمای فرمی را برای الکترون های درون یک فلز بدست آورید. هم چنین سرعت الکترونیایی را که نزدیک سطح فرمی در حرکت اند مشخص کنید. طول موج گرمایی آنها را نیز حساب کنید. این طول موج گرمایی را با فاصله میانگین بین الکترون ها مقایسه کنید.

■ **تمرین:** دمای فرمی را برای نوترون های درون یک ستاره نوترونی بدست آورید.

۲.۵ تقریب های بالاتر

در این حد پارامتر z بزرگ است ولی بی نهایت نیست و در بسط تابع های $f_n(z)$ بر حسب $\ln z$ باید علاوه بر اولین جمله، جمله های دیگر را هم نگاه داریم. وقتی که T صفر است، گاز فرمی کاملا واگن خوانده می شود. در این دما $n\lambda^d$ بیشترین مقدار خود را دارد و تمام تراز های انرژی زیر سطح فرمی کاملا پر و تمام تراز های بالای سطح فرمی کاملا خالی هستند. با افزایش دما طول موج دوپروی ذرات و در نتیجه $n\lambda^3$ کوچک تر شده ولی هنوز مقدار بزرگ ولی متناهی ای را اختیار می کند. تابع توزیع ذرات نیز هموار می شود. در این حد که z بسیار بزرگ است، دیگر

نمی توانیم از بسط توانی توابع $f_n(z)$ برحسب قوای z استفاده کنیم ولی می توانیم آن را بر حسب $\ln(z)$ بسط دهیم. این بسط همان رابطه (۲۹) است. در ضمیمه این درس نحوه بدست آوردن این بسط شرح داده شده است. چند جمله اول تابع توزیع $f_n(z)$ به صورت زیر است:

$$f_n(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \zeta^n \left[1 + n(n-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right] \quad (۶۷)$$

که در آن $\zeta = \ln(z)$. با استفاده از این بسط می توانیم خواص ترمودینامیکی گاز فرمیونی را در دماهای پایین مطالعه کنیم. برخلاف دماهای بالا یا چگالی های پایین، روابط ترمودینامیکی گاز در این حد نهایتاً بسطی بر حسب $n\lambda^d$ نخواهند بود، زیرا این پارامتر در این محدوده پارامتر بزرگی است. چنانکه خواهیم دید، در این محدوده، توابع ترمودینامیکی برحسب $\frac{kT}{\epsilon_F}$ بسط داده خواهند شد که همان چیزی است که از نظر فیزیکی انتظارش را داریم. در واقع هر چه که kT نسبت به ϵ_F کوچکتر باشد، ما به رژیم کوانتومی نزدیک تر هستیم و آثار کوانتومی شدیدتر هستند. پس از این مقدمه، به نحوه یافتن روابط ترمودینامیکی می پردازیم. برای مثال اولین رتبه را محاسبه می کنیم، به این معنا که در توابع (۲۹) دومین جمله بسط را نیز در نظر می گیریم. بر اساس این روابط داریم:

$$n\lambda^d = \frac{1}{\Gamma(d/2+1)} \zeta^{d/2} \left[1 + \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right] \quad (۶۸)$$

و

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2+2)} \zeta^{d/2+1} \left[1 + \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} + 1 \right) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right] \quad (۶۹)$$

سوال این است که چگونه می بایست ξ را بین این معادلات حذف کرد. برای این کار از روش بازگشتی استفاده می کنیم. از رابطه (۴۴) می دانیم که

$$n\lambda^d \Gamma(d/2+1) = \xi_0^{d/2}$$

که در آن $\xi_0 = \frac{\epsilon_F}{kT}$ است. بنابراین رابطه (۶۸) شکل کلی اش چنین است:

$$\zeta_0^{d/2} = \xi^{d/2} \left(a_0 + \frac{a_1}{\xi^2} + \frac{a_2}{\xi^4} + \frac{a_3}{\xi^6} + \dots \right), \quad (۷۰)$$

که در آن a_i ها ضرایب بسطی هستند که در رابطه (۶۸) نوشته شده اند. این رابطه را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\zeta_0 = \zeta \left(1 + \frac{a_1}{\zeta^2} + \frac{a_2}{\zeta^4} + \frac{a_3}{\zeta^6} + \dots \right)^{\frac{2}{d}} \quad (۷۱)$$

و با استفاده از بسط دو جمله ای یعنی

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{1}{2!} m(m-1)x^2 + \frac{1}{3!} m(m-1)(m-2)x^3 + \dots \quad (۷۲)$$

که برای m های کسری نیز برقرار است، می توانیم آن را به صورت زیر در آوریم:

$$\zeta_0 = \zeta \left(1 + \frac{a'_1}{\zeta^2} + \frac{a'_2}{\zeta^4} + \frac{a'_3}{\zeta^6} + \dots \right) \quad (73)$$

که در آن a'_i ها ضرایب جدیدی هستند که از ضرایب اولیه a_i و این بسط دو جمله ای بدست می آیند. حال این رابطه را می توانیم معکوس کنیم و بنویسیم:

$$\zeta = \zeta_0 \left(1 + \frac{b_1}{\zeta_0^2} + \frac{b_2}{\zeta_0^4} + \frac{b_3}{\zeta_0^6} + \dots \right) \quad (74)$$

که در آن b_i ها ضرایبی هستند که با استفاده از رابطه (73) مساوی قرار دادن توان های ζ_0 در دو طرف بدست می آیند. حال می توانیم ξ را که بدست آورده ایم در رابطه فشار یا انرژی یا هر تابع ترمودینامیکی دیگر نیز قرار دهیم. به این ترتیب همه روابط ترمودینامیکی به عنوان بسط هایی از $\frac{1}{\zeta_0^2} = \left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2$ تعیین می شوند.

■ **تمرین:** نشان دهید که در رتبه اول (بعد از رتبه صفرم) پتانسیل شیمیایی به شکل زیر است:

$$\mu = \epsilon_F \left(1 - \frac{(d-2)\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2 \right) \quad (75)$$

در همین مرتبه تقریب، معادله حالت، انرژی، ظرفیت گرمایی ویژه و تراکم پذیری را نیز محاسبه کنید.

۶ گاز فرمی در میدان مغناطیسی - پارامغناطیس

$$\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i \quad (76)$$

$$\hat{H}_i = \frac{\hat{P}_i^2}{2m} - \gamma \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (77)$$

$$\hat{H}_i = \frac{\hat{P}_i^2}{2m} - \gamma B \sigma_z \quad (\text{v8})$$

$$\hat{H}_i = \frac{\hat{P}_i^2}{2m} \otimes I_s - \gamma B I_c \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} \frac{\hat{P}_i^2}{2m} - \gamma B & 0 \\ 0 & \frac{\hat{P}_i^2}{2m} + \gamma B \end{pmatrix} \quad (\text{v9})$$

$$\hat{H}_i = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\epsilon_1 - \gamma B) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{80})$$

$$\hat{H}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = (\epsilon_1 + \gamma B) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{81})$$

$$|\psi_1, +\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_1, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{82})$$

$$|n_1^+, n_2^+, n_3^+, \dots, n_1^-, n_2^-, n_3^-, \dots\rangle \quad (\text{83})$$

$$E = n_1^+ (\epsilon_1 - \gamma B) + n_2^+ (\epsilon_2 - \gamma B) + \dots + n_1^- (\epsilon_1 + \gamma B) + n_2^- (\epsilon_2 + \gamma B) + \dots \quad (\text{84})$$

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} [n_i^+ (\epsilon_i - \gamma B) + n_i^- (\epsilon_i + \gamma B)] \quad (\text{85})$$

$$Z_{N_+, N_-} = \sum_{\{n_i^+\}} e^{-\beta [\sum_{i=1}^{\infty} n_i^+ (\epsilon_i - \gamma B)]} \sum_{\{n_i^-\}} e^{-\beta [\sum_{i=1}^{\infty} n_i^- (\epsilon_i + \gamma B)]} \quad (\text{86})$$

$$\mathcal{Q} = \sum_{N_+, N_-} z^{N_+ + N_-} Z_{N_+, N_-} = \sum_{\{n_l^+\}} \prod_l z^{n_l^+} e^{-\beta(\epsilon_l - \gamma B)n_l^+} \sum_{\{n_l^-\}} \prod_l z^{n_l^-} e^{-\beta(\epsilon_l + \gamma B)n_l^-} \quad (87)$$

$$\mathcal{Q} = \prod_l \sum_{\{n_l^+\}} e^{-\beta((\epsilon_l - \gamma B)n_l^+)} \prod_l \sum_{\{n_l^-\}} e^{-\beta((\epsilon_l + \gamma B)n_l^-)} \quad (88)$$

$$\mathcal{Q} = \prod_l \left[1 + ze^{-\beta(\epsilon_l - \gamma B)} \right] \prod_l \left[1 + ze^{-\beta(\epsilon_l + \gamma B)} \right] \quad (89)$$

$$\ln \mathcal{Q} = \sum_l \ln(1 + ze^{-\beta(\epsilon_l - \gamma B)}) + \sum_l \ln(1 + ze^{-\beta(\epsilon_l + \gamma B)}) \quad (90)$$

$$\langle n_l^+ \rangle = \frac{1}{1 + z^{-1}e^{\beta(\epsilon_l - \gamma B)}} \quad \langle n_l^- \rangle = \frac{1}{1 + z^{-1}e^{\beta(\epsilon_l + \gamma B)}} \quad (91)$$

$$\langle n_l^+ \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_l - \gamma B - \mu)}} \quad \langle n_l^- \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_l + \gamma B - \mu)}} \quad (92)$$

$$\langle n_l^+ \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_l - \epsilon_F^+)}} \quad \langle n_l^- \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_l - \epsilon_F^-)}} \quad (93)$$

$$\epsilon_F^+ = \mu - \gamma B, \quad \epsilon_F^- = \mu + \gamma B. \quad (94)$$

$$\ln \mathcal{Q} = \sum_l \ln(1 + z^+ e^{-\beta\epsilon_l}) + \sum_l \ln(1 + z^- e^{-\beta\epsilon_l}) \quad (95)$$

$$z^+ = ze^{\beta\gamma B} = e^{\beta(\mu+\gamma B)}, \quad z^- = ze^{-\beta\gamma B} = e^{\beta(\mu-\gamma B)}, \quad (96)$$

$$\ln Q = \frac{V}{\lambda^d} f_{\frac{d}{2}+1}(z^+) + \frac{V}{\lambda^d} f_{\frac{d}{2}+1}(z^-) \quad (97)$$

$$N = \frac{V}{\lambda^d} f_{\frac{d}{2}}(z^+) + \frac{V}{\lambda^d} f_{\frac{d}{2}}(z^-) \quad (98)$$

۷ گاز فرمی در میدان مغناطیسی - دیامغناطیس

۱.۷ ترازهای لانداو

$$\mathbf{B} = B\hat{z} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0) \quad (99)$$

۸ مسئله‌ها:

■ مسئله اول: رابطه (۳۷) را بدست آورید.

■ مسئله دوم: نشان دهید که برای یک گاز فرمیونی رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_P = -\frac{5}{2T} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}. \quad (100)$$

سپس نشان دهید که

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} \frac{f_{5/2}(z)f_{1/2}(z)}{(f_{3/2}(z))^2}. \quad (101)$$

■ **مسئله سوم:** نشان دهید که ضریب تراکم پذیری همدمها و ضرایب تراکم پذیری بی در رو برای یک گاز فرمی به ترتیب برابرند با:

$$\kappa_T = \frac{1}{nkT} \frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)}, \quad \kappa_S = \frac{3}{5nkT} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{5/2}(z)}, \quad (102)$$

که در آن ها n چگالی گاز است. سپس نشان دهید که در دماهای کم این ضرایب به صورت زیر خواهند بود:

$$\kappa_T \approx \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right], \quad \kappa_S \approx \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (103)$$

■ **مسئله چهارم:** فرض کنید که در یک گاز فرمی رابطه انرژی و تکانه به جای $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ به صورت $\epsilon = \alpha p^s$ است.

الف: برای این گاز انرژی فرمی را بر حسب چگالی بدست آورید.

ب: نشان دهید که برای این گاز در d بعد، رابطه زیر برقرار است: $PV = \frac{s}{d}U$

۹ ضمیمه ها:

۱.۹ اثبات رابطه (۲۳)

با توجه به رابطه ای که قبل از رابطه (۲۳) ثابت کردیم می نویسیم:

$$\begin{aligned} z f'_n(z) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} \left[-\frac{d}{dx} \frac{1}{1+z^{-1}e^x} \right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left[-\frac{x^{n-1}}{1+z^{-1}e^x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (n-1) \frac{x^{n-2}}{1+z^{-1}e^x} dx \right] \\ &= 0 + \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+z^{-1}e^x} dx = f_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (104)$$

۲.۹ اثبات رابطه (۲۸)

تابع فرمیونی $f_n(z)$ به این صورت تعریف می شود:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{1+z^{-1}e^x}. \quad (105)$$

برای آنکه بسط توانی این تابع را برای z های کوچک بدست آوریم به ترتیب زیر عمل می کنیم: نخست کسر داخل انتگرال را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} dx z e^{-x} \frac{1}{1 + z e^{-x}} \quad (106)$$

چون $z e^{-x}$ کوچکتر از ۱ است، می توانید از بسط دو جمله ای استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} dx z e^{-x} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l z^l e^{-lx} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} (-1)^l z^{l+1} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x(l+1)} dx. \end{aligned} \quad (107)$$

اما انتگرال بالا برابر است با $\frac{1}{(l+1)^n} \Gamma(n)$. بنابراین

$$f_n(z) = z - \frac{z^2}{2^n} + \frac{z^3}{3^n} - \frac{z^4}{4^n} + \dots \quad (108)$$

۳.۹ اثبات رابطه (۲۹)

می دانیم تابع $f_n(z)$ به شکل $f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{1+z^{-1}e^x}$ تعریف شده است. ممکن است فکر کنیم حال که z بزرگ است این تابع را می توان بر حسب قوای متولی z^{-1} بسط داد اما این کار درست نیست زیرا اگرچه z^{-1} کوچک است ولی در زیر انتگرال و با افزایش x بالاخره e^x انقدر بزرگ می شود تا اینکه $z^{-1}e^x$ از ۱ بزرگ تر می شود و بسط دو جمله ای را از اعتبار می اندازد. پس راه درست این است که دامنه انتگرال را به دو قسمت تبدیل کنیم، یکی قسمتی که در آن $z^{-1}e^x < 1$ و دیگری قسمتی که در آن $z^{-1}e^x > 1$ و برای هر کدام یک شیوه متفاوت بسط اختیار کنیم. بهتر است پارامتر ζ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$z = e^{\zeta}, \quad \zeta = \ln z. \quad (109)$$

هم چنین فعلا از ضرب $\frac{1}{\Gamma(n)}$ صرف نظر می کنیم و تابع $\tilde{f}_n(z) = \Gamma(n)f_n(z)$ را بسط می دهیم:

$$\tilde{f}_n(z) = \int_0^{\zeta} \frac{x^{n-1} dx}{1 + e^{x-\zeta}} + \int_{\zeta}^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{1 + e^{x-\zeta}}. \quad (110)$$

در هر دو انتگرال تغییر متغیر می دهیم. در انتگرال اول قرار می دهیم $x - \zeta = -u$ و در انتگرال دوم قرار می دهیم: $x - \zeta = u$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\tilde{f}_n(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{(\zeta - u)^{n-1}}{1 + e^{-u}} du + \int_0^{\infty} \frac{(\zeta + u)^{n-1}}{1 + e^u} du$$

$$= \int_0^\zeta (\zeta - u)^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} (-e^{-u})^l du + \int_0^\infty e^{-u} (\zeta + u)^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} (-e^{-u})^l du. \quad (111)$$

در انتگرال اول جمع را می توان به دو قسمت $l = 0$ و $l > 0$ جدا کرد. در قسمت $l > 0$ بدلیل وجود جملات e^{-lu} می توان با تقریب خیلی خوب حد بالای انتگرال را به سمت ∞ میل داد. بنابراین پس از محاسبه انتگرال جمله $l = 0$ و جمع و جور کردن جملات خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(\zeta) &= \frac{1}{n} \zeta^n + \int_0^\infty [(\zeta - u)^{n-1} - (\zeta + u)^{n-1}] \sum_{l=1}^{\infty} (-e^{-u})^l du \\ &= \frac{1}{n} \zeta^n + \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \zeta^{n-1-k} u^k [(-1)^k - 1] \right) \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l e^{-lu} du \\ &= \frac{1}{n} \zeta^n + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{\infty} \binom{n-1}{k} \zeta^{n-1-k} (-1)^l [(-1)^k - 1] \int_0^\infty u^k e^{-lu} du. \end{aligned} \quad (112)$$

مقدار انتگرال آخر برابر است با $\frac{k!}{l^{k+1}}$.

بنابراین بدست می آوریم:

$$\tilde{f}_n(z) = \frac{1}{n} \zeta^n + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=odd}^{n-1} (-1)^{l-1} \frac{1}{l^{k+1}} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \zeta^{n-1-k} \quad (113)$$

می توانیم طرف راست را به صورت فشرده تری بنویسیم. جمع روی l را انجام می دهیم. قرار می دهیم:

$$\eta(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{4^{k+1}} + \dots \quad (114)$$

بنابراین تابع $\tilde{f}_n(z) := \frac{\tilde{f}_n(z)}{\Gamma(n)}$ می شود:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \zeta^n \left[1 + 2 \sum_{k=odd}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-k)!} \frac{\eta(k)}{\zeta^{k+1}} \right]. \quad (115)$$

می توان از این هم پیش تر رفت و تابع $\eta(k)$ را به تابع زتای ریمان ربط داد. برای این کار کافی است که به طرفین رابطه قبلی عبارت

$$A = 2 \left[\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{4^{k+1}} + \frac{1}{6^{k+1}} + \dots \right]$$

را اضافه کرد. باتوجه به این که

$$\eta(k) + A = 1 + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{4^{k+1}} + \dots = \zeta(k+1) \quad (116)$$

که در آن $\zeta(k) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^k}$ تابع زتای ریمان^۳ است. اما نکته جالب این است که A را نیز می توان بر حسب این تابع نوشت زیرا:

$$A = 2 \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \zeta(k+1). \quad (117)$$

بنابراین

$$\eta(k) = (1 - 2^{-k}) \zeta(k+1). \quad (118)$$

می توان ثابت کرد که :

(119)

$$\zeta(1) = \infty, \quad \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2.612, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.645, \quad \zeta(3) = 1.202, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \dots$$

چند جمله اول تابع $f_n(\zeta)$ به صورت زیر است:

$$f_n(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \zeta^n \left[1 + n(n-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\zeta^2} + n(n-1)(n-2)(n-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{\zeta^4} + \dots \right].$$

■ **قدردانی:** از آقای آرمین یداللهی دانشجوی این درس در سال ۱۴۰۳ که با دقت استثنایی تمامی اشکالات متن اولیه این درسنامه را به من یادآوری کردند تشکر می کنم.